Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo 2007

Nombre: ______________________

Carnet: ______________ Sección: _____

MA-1112— Primer parcial Tipo A1—

1. Calcule las siguientes integrales

   a) (5 puntos)

$$\int \frac{\left(a+b\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+1}}dx$$

Solución

Sea I la integral que queremos calcular. Hacemos la sustitución $u = a + b\sqrt{x+1}$, $du = \frac{b}{2\sqrt{x+1}}dx$

$$I = \frac{2}{b}\int u^2 du = \frac{2}{b}\frac{u^3}{3} + C = \frac{2}{3b}\left(a+b\sqrt{x+1}\right)^3 + C.$$

Otra manera de hacer la integral es desarrollar el cuadrado en el numerador

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{a^2+2ab\sqrt{x+1}+b^2\left(\sqrt{x+1}\right)^2}{\sqrt{x+1}}dx = a^2\int \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx + 2ab\int 1dx + b^2\int \sqrt{x+1}dx \\ &= 2a^2\sqrt{x+1} + 2abx + \frac{2b^2}{3}(x+1)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

   b) (5 puntos)

$$\int \frac{\tan t \sec^2 t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}dt$$

Solución

Sea I la integral que queremos calcular. Hacemos la sustitución $u = \tan(t)$, $du = \sec^2(t)\, dt$,

$$I = \int \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}du.$$

Hacemos la sustitución $x = 1 + u^2$, $dx = 2udu$

$$I = \int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x} + C = \sqrt{1+u^2} + C = \sqrt{1+\tan^2(t)} + C.$$

2. Calcule la siguiente integral

$$\int_{-2}^{3} (|5x-10| + |3-3x|)\,dx$$

Solución

Sea I la integral que queremos calcular. Entonces

$$I = 5\int_{-2}^{3} |x-2|\,dx + 3\int_{-2}^{3} |1-x|\,dx$$

Recordamos que

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \text{ y } |1-x| = |x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ 1-x & x < 1 \end{cases} .$$

Entonces

$$\begin{aligned} I &= 5\left(\int_{-2}^{2} (2-x)\,dx + \int_{2}^{3} (x-2)\,dx\right) + 3\left(\int_{-2}^{1} (1-x)\,dx + \int_{1}^{3} (x-1)\,dx\right) \\ &= 5\left(\left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_{2}^{3}\right) + 3\left(\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{1}^{3}\right) \\ &= 5\left([4-2+4+2] + \left[\frac{9}{2} - 6 - 2 + 4\right]\right) + 3\left(\left[1 - \frac{1}{2} + 2 + 2\right] + \left[\frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + 1\right]\right) \\ &= 5\left(8 + \frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{9}{2} + 2\right) = 62 \end{aligned}$$

3. Considere la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

   a) (3 puntos) Utilizando una partición con intervalos de igual longitud, encuentre una expresión para la suma de Riemman S_n de $f(x)$ en el intervalo [0,1], evaluando $f(x)$ en el extremo derecho x_i de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición x_0, x_1, x_2,...,x_n.

   b) (2 puntos) Encuentre $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2}$ usando el Teorema Fundamental del Cálculo.

Solución

a) Tenemos $x_i = \frac{i}{n}$ para $i = 0, ..., n$ y $\overline{x}_i = x_i = \frac{i}{n}$ para $i = 1, ..., n$. Entonces

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\left(x_i\right)^2}\left(x_i - x_{i-1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{n^2+i^2}\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2}. \end{aligned}$$

b) Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)\big|_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

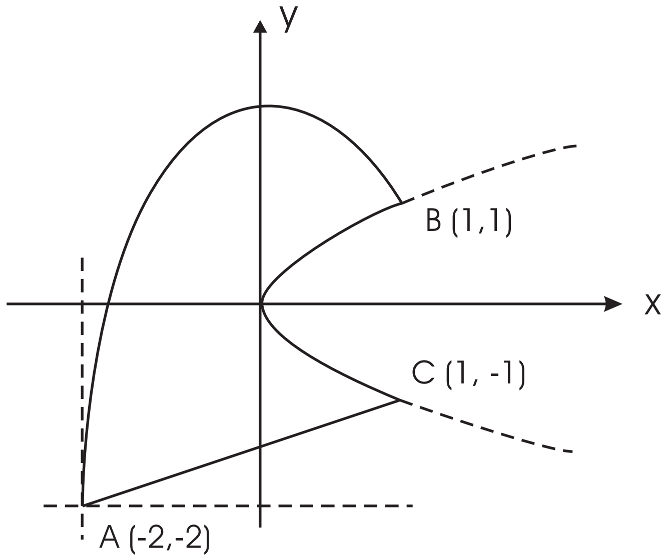
Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

4. Dada la figura plana, limitada por :

   i) arco de la parábola de ecuación $y = 2 - x^2,$ de extremos $A(-2,-2), B(1,1);$
   ii) arco de la parábola de ecuación $x = y^2,$ de extremos $C(1,-1),\ \ B(1,1);$
   iii) segmento $AC,$

Solución



a) bosqueje la figura,

b) exprese el área de la figura por medio de convenientes integrales, NO CALCULE LAS INTEGRALES, ecuación de la recta por $A,\ \ C:\ \ y = \dfrac{x-4}{3};$

Área $= \displaystyle\int_{-2}^{0} \left[(2-x^2) - \left(\frac{x-4}{3}\right)\right] dx + \int_{0}^{1} [\,(2-x^2) - \sqrt{x}\,]\, dx + \int_{0}^{1} \left[-\sqrt{x} - \left(\frac{x-4}{3}\right)\right] dx;$

otra posibilidad:

Área $= \displaystyle\int_{-2}^{1} \left[(2-x^2) - \left(\frac{x-4}{3}\right)\right] - \int_{-1}^{1} (1-y^2)\,dy.$